微分方程式とカオス

作花一志（京都情報大学院大学）

次頁の図２はカオスの例として有名なローレンツアトラクターであるが，これは連立非線形微分方程式の解である。そういう名前を聞くだけでお手上げになってしまう。微分方程式とは微積分学の教科書の最後の章に出てくるもので，それまでに延々と続いているなんとかの定理，なんとかの公式・・・を理解してやっとたどり着くものだ。しかもそこの現れるほとんどの例題は変数分離型，もしくは巧妙な方法で変数分離型に変換できるものである。しかし社会現象はもちろんのこと自然現象も非線形連立だらけで，変数が分離できるものは例外であろう。

ところが実は微分方程式は簡単なプログラミングで数値的に解くことができるのである。次の微分方程式

$$y' = y - 10sin(6t)$$

を初期条件 y(0)=1 のもとで解いてみよう。線形であるから解析的方法で解けるが，実際やってみるとかなり面倒である。

$$y = (-23e^t + 10\,sin(6t) + 60cos\,(6t))/37$$

そこで科学技術計算用のフリーソフト Scilab を使って解いてみよう。知名度はあまり高くないが２D･３D グラフ描画，非線型方程式の解法，数値積分，連立 1 次方程式の解法，固有値問題，統計解析，微分方程式の解法その他いろいろできる便利なツールである。最新版は Ver5.2.0 で，ダウンロードは[1]からできる。使い方は筆者のサイト[2]を参考にしていただきたい。Scilab には関数が非常に多いのでそれらを組み合わせればプログラム（というほどでもないが）は簡単にできる。

```
t0=0 ; y0=1 ;                                  //初期条件
deff("ydot=df(t,y)","ydot=y-10*sin(6*t)")   //方程式の定義　ydot とはdy/dtのこと
ta=0;tb=3;tstep=0.1              //独立変数 t の始点 ta,終点 tb およびステップ tstep
t=ta:tstep:tb;                                //解の範囲
y=ode(y0 , t0 , t , df )                      //解
```

この ode が微分方程式を解く関数で（ ）内は初期値，独立変数，定義された微分方程式である。この結果 31 個の値が求まるが，それは ta=0;tb=3;tstep=0.1 に対する t と y の値である。すなわち y は 31 の要素を持つベクトルである。それらをテキストファイル dfe.txt に順に書き出すには ' を使って転置して，C 言語とよく似た format を使って

```
F=mopen("dfe.txt","w");
  mfprintf(F,"%5.2f %5.3f¥n",t',y');
mclose(F);
```
また（t,y）面にプロットするには
```
plot2d(t,y,2);
```
とすればよい。2 は色コード（青）であり，目盛は自動的に振られる。結果は下図で青線が y で振動しながら減少していく。赤線は y と解析解との差でありよく一致していることがわかる。

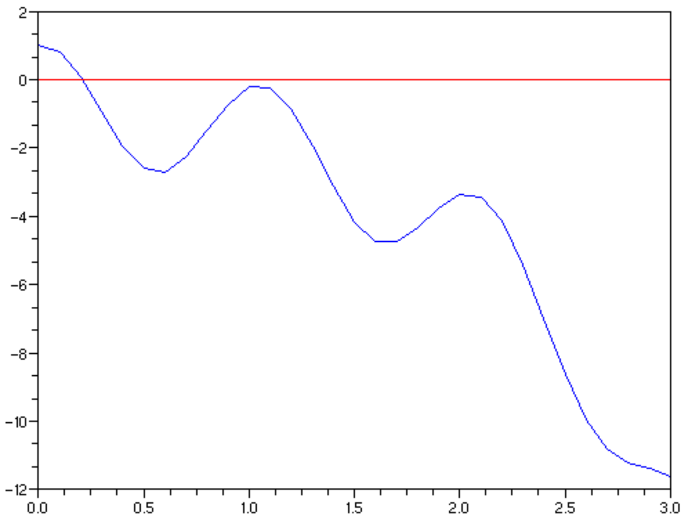


図１　y=y’ －10sin(6t) の解

線形であれ非線形あれ，どんな微分方程式でも，deff の中を変えるだけで全く同じ方法で解くことができる。

さてローレンツアトラクラーを与えるのは次のような 非線形連立微分方程式である。

$$x' = -10x + 10y \qquad x(0) = 1$$
$$y' = 28x - y - xz \qquad y(0) = 0$$
$$z' = -8/3z + xy \qquad z(0) = 0$$

Scilab では 3 変数 x,y,z をベクトルとしてまとめてしまう。
すなわち x=x(1),y=x(2),z=x(3),
この微分方程式を次の関数で定義する。xdot(1)は dx(1)/dt=x’を表している。.
```
function xdot=func(t,x)
   xdot(1)=10*(x(2)－x(1));
   xdot(2)=28*x(1)－x(2)－x(1)*x(3);
   xdot(3)=－8/3*x(3)+x(1)*x(2);
```

```
endfunction
```
独立変数 t は
```
ta=0;tstep=0.02;tb=80;t0=0
t=ta:tstep:tb;
xx=ode([1;0;0], t0, t, func);
```
[ ]内の 3 数は x(1), x(2), x(3)の初期値（t=t0 のときの値）。

結果は xx は 3 行 m 列の行列に収められる。ここに m は t が 0 から 80 まで 0.02 刻みなので m=4001。その第 1 行 xx(1,:)は x 値　第 2 行 xx(2,:)は y 値　第 3 行 xx(3,:)は z 値である。

t と xx をファイル lor.txt に書き出すには
```
F=mopen("lor.txt",'w');
  mfprintf(F,"%5.1f %10.3f %10.3f %10.3f¥n",t',xx(1,:)',xx(2,:)',xx(3,:)');
mclose(F);
```

また xyz　3 次元プロットするには param3d を使う。
```
clf();
xset('color',5);//赤色で
param3d(xx(1,:),xx(2,:),xx(3,:),95,80,'X@Y@Z'); //x y z
xtitle("Lorenz Equation");
```

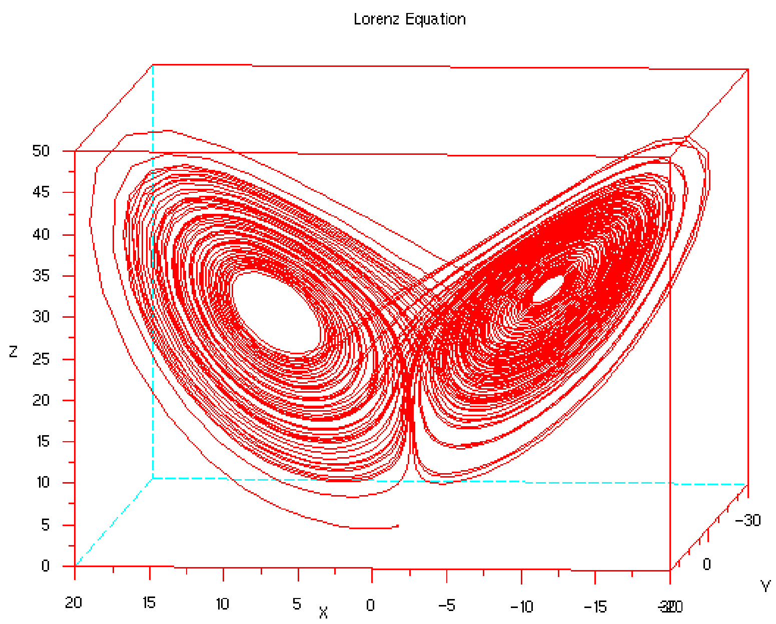
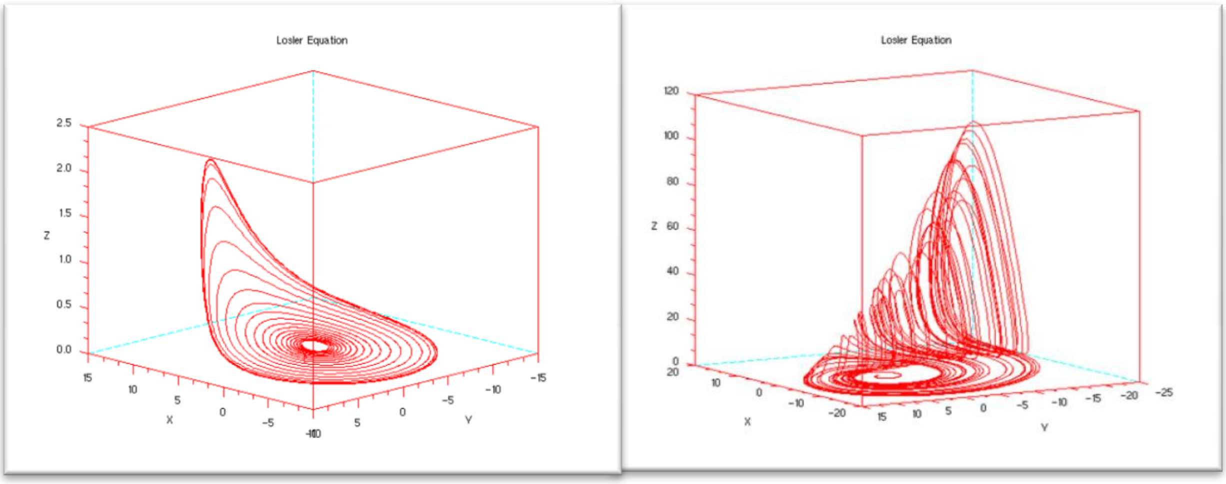


図 2　ローレンツアトラクタ

図は 4001 点を結んだものであり，GIF としてエキスポートできる。

次の微分方程式は a, b, c 値のわずかな違いで結果が大きく異なる例である。a の値を変えるだけで左右結果は大きく違ってくる。

$$dx/dt=-y-z \qquad x(0)=1$$
$$dy/dt=x+ay \qquad y(0)=0$$
$$dz/dt=b-cz+xz \qquad z(0)=0$$



a=0.07 b=2.0 c=10.0　　a=0.42 b=2.0 c=10.0

図 3　レスラーアトラクタ

また 2 階微分方程式を連立 1 階微分方程式に変形してこの方法で解くことができる。

$y''+ay'+by=F(t,y,y')$　初期条件　$y(0)=y0$　$y'(0)=v0$　を

$y'=v$　とおくと　$v'=-av-by+F(t,y,y')$

さらに，$y\rightarrow x2$，$v\rightarrow x1$　に置き換えると，

$x1'=-a*x1-b*x2+F(t,x2,x1)$

$x2'=x1$　である。

そこで F の関数形と a,b の値を与えてこの方程式を関数にする

```
function xdot=func(t,x)
 xdot(1)=-a*x(1)-b*x(2)+F;
 xdot(2)=x(1);
endfunction
```

xx=ode([v0;y0],0,t,func)の第 1 行が y'を　第 2 行が y を与える。

参考文献

[1] http://www.scilab.org/download/
[2] http://www.kcg.ac.jp/kcg/sakka/math/num/scilab/index.htm